Grundmodell der Entscheidungstheorie

Aktionsfeld =	Menge einander ausschließender Handlungsalternativen: a_i (i=1, 2, ..., m)
Umweltzustände =	Menge sonstiger Faktorkonstellationen, die vom Entscheidungsträger nicht kontrollierbar, aber ergebnis-beeinflussend sind: s_j (j=1, 2, ..., n)
Ergebnis =	Ergebniswert, der sich ergibt, wenn Handlungsalternative a_i gewählt wird und Umweltzustand s_j eintritt: e_{ij}

Die Ergebnismatrix

Umweltzustände

Handlungsalternativen

	s_1	s_2	…	s_j	…	s_n
a_1	e_{11}	e_{12}		e_{1j}		e_{1n}
a_2	e_{21}	e_{22}		e_{2j}		e_{2n}
$\vdots$						
a_i	e_{i1}	e_{i2}		e_{ij}		e_{in}
$\vdots$						
a_m	e_{m1}	e_{m2}		e_{mj}		e_{mn}

Ergebniswerte

Typen von Entscheidungssituationen I

	Sicherheit	Unsicherheit
Ein Ergebniszeitpunkt	~~Nicht relevant~~	Entscheidungs-theorie
Mehrere Ergebniszeitpunkte	Investitions-theorie	~~Nicht relevant~~

Typen von Entscheidungssituationen II

Entscheidungen unter Sicherheit
Ein Umweltzustand, der mit Sicherheit eintritt

Entscheidungen unter Unsicherheit
Verschiedene Umweltzustände möglich

KE1

Ungewissheits-situationen
Umweltzuständen können keine Eintritts-wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden

KE2

Risikosituationen
Umweltzuständen können Eintrittwahrscheinlich-keiten zugeordnet werden

KE3

Spielsituationen
Eintritt eines Umweltzustands hängt von der Aktion eines rationalen Gegen-spielers ab.

Vorauswahl mit Dominanzprinzipien I

Definition: Absolute Dominanz

Eine Alternative a_1 ist einer anderen Alternative a_2 auf jeden Fall dann vorzuziehen, wenn das schlechtestmögliche Ergebnis von a_1 nicht schlechter ist als das bestmögliche Ergebnis von a_2, wenn also gilt:

$$\boxed{\min(e_{1j}) \geq \max(e_{2j})}$$

Definition: Zustandsdominanz

Eine Alternative a_1 ist einer anderen Alternative a_2 auf jeden Fall dann vorzuziehen, wenn a_1 bei keinem Umweltzustand zu einem schlechteren, bei mindestens einem Zustand jedoch zu einem besseren Ergebnis führt als die Alternative a_2, wenn also gilt:

$$\boxed{e_{1j} \geq e_{2j} \text{ für alle } j = 1;2;\ldots;n}$$

$$\boxed{e_{1j} > e_{2j} \text{ für mindestens ein } j}$$

Ergebnisdarstellung bei Risikosituationen

Durch Zusammenfassen gleicher Ergebniswerte und aufsteigender Sortierung der Ergebniswerte erhält man:

	s_1 p=0,1	s_2 p=0,3	s_3 p=0,2	s_4 p_1=0,4
a_1	-80	+60	+20	-40
a_2	+10	0	+5	0
a_3	+60	+10	-15	-15

e	-80	-40	+20	+60
$p(e_1=e)$	0,1	0,4	0,2	0,3

e	0	+5	+10
$p(e_2=e)$	0,7	0,2	0,1

e	-15	+10	+60
$p(e_3=e)$	0,6	0,3	0,1

	-80	-40	-15	0	+5	+10	+20	+60	> 60
$p(e_1 \geq e)$	1	0,9	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,3	0
$p(e_2 \geq e)$	1	1	1	1	0,3	0,1	0	0	0
$p(e_3 \geq e)$	1	1	1	0,4	0,4	0,4	0,1	0,1	0

Lösung von Entscheidungssituationen

1. Charakterisierung der Ergebnisverteilungen durch **Verteilungskennzahlen**, wie Durchschnittswerte, Extremwerte oder Streuungsparameter.

2. Bewertung der Handlungsalternativen mittels einer **Präferenzfunktion** Φ (=Rechenregel).
   Die Präferenzfunktion konkretisiert die Entscheidungsregel.
   Bestandteil der Präferenzfunktion sind die Kennzahlen.
   Ergebnis der Präferenzfunktion ist der Präferenzwert φ.

3. Auswahl einer Alternative gemäß der Entscheidungsregel.
   Normalfall: Wahl der Alternative a_i mit dem höchsten Präferenzwert $\varphi(a_i)$.

Entscheidungsregeln – Beispiel

Verbale Entscheidungsregel:
Wähle die Handlungsalternative, bei der die Summe aus dem größten Ergebniswert und dem kleinsten Ergebniswert maximal wird!

Präferenzfunktion: max: $\varphi(a_i) = \Phi[\max(E_i), \min(E_i)]$
$= \max(E_i) + \min(E_i)$

	s_1	s_2	s_3
a_1	-80	60	20
a_2	10	0	5
a_3	60	10	-15

$E_1 \equiv$ Ergebnisverteilung der Alternative 1

$y_1(E_1)$ = max. von a_1 = 60
$y_2(E_1)$ = min. von a_1 = -80

$\varphi(a_i) = 20 + (-80) = -60$

Zentralmaße

Erwartungswert

Der Erwartungswert gibt das Durchschnittsergebnis einer Alternative an, wobei die Wahrscheinlichkeiten als Gewichte verwendet werden.

$$\boxed{\mu_i = \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \cdot p_j}$$

Modus

Der Modus ist der am wahrscheinlichsten eintretende Wert.

Median

Der Median ist der größte Ergebniswert, der mit 50 %-iger Wahrscheinlichkeit eintritt oder übertroffen wird.

Extremmaße I

Der **bestmögliche** Ergebniswert e^{max}: $\boxed{e_i^{max} = \max_j(e_{ij})}$

Der **schlechtestmögliche** Ergebniswert e^{min}: $\boxed{e_i^{min} = \min_j(e_{ij})}$

„**Maximales Bedauern**“ ist der maximale Nachteil gegenüber dem bei den jeweiligen Umweltzuständen bestmöglichen Ergebniswerten.

$$y_i = \max_j \left[\max_k(e_{kj}) - e_{ij} \right]$$

„**Maximales Frohlocken**“ ist der maximale Vorteil gegenüber dem bei den jeweiligen Umweltzuständen schlechtestmöglichen Ergebniswerten.

$$y_i = \max_j \left[e_{ij} - \min_k(e_{kj}) \right]$$

Extremmaße II

Der **Fraktilswert** f ist der größte Ergebniswert, für den die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens erreicht wird, nicht unterhalb einer kritischen Wahrscheinlichkeit p_k liegt.

Die **Ruin- oder Verlustwahrscheinlichkeit** v ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein besonders kritischer Ergebniswert e_k unterschritten wird.

$$\boxed{v_i = p(e_i < e^k) = \sum_{j \in K(i)} p_j \text{ mit } K(i) = \left\{ j \mid e_{ij} < e^k \right\}}$$

Die **Verlusterwartung** V ist der Erwartungswert des Abstandes aller unterhalb eines kritischen Ergebnisniveaus e_k liegenden Ergebnisse von diesem kritischen Wert e_k.

$$\boxed{V_i = \sum_{j \in K(i)} p_j \cdot (e^k - e_{ij}) \text{ mit } K(i) = \left\{ j \mid e_{ij} < e^k \right\}}$$

Streuungsmaße

Die **Variationsbreite** ist die Differenz zwischen maximalem und minimalem Ergebniswert.

$$y_i = \max_j(e_{ij}) - \min_j(e_{ij})$$

Die **mittlere absolute Abweichung** vom Erwartungswert:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \left| e_{ij} - \mu_i \right| \cdot p_j$$

Die **Varianz** σ^2 ist die quadratische Abweichung vom Erwartungswert.
Die Wurzel aus der Varianz ist die **Standardabweichung** σ.

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(e_{ij} - \mu_i \right)^2 \cdot p_j$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(e_{ij} - \mu_i \right)^2 \cdot p_j}$$

Entscheidungsregeln – Allgemeine Struktur

Entscheidungsregeln sind Aussagen darüber, nach welchen Kriterien aus den zur Wahl stehenden Alternativen die zu realisierende Aktion bestimmt werden soll. Eine solche verbale Entscheidungsregel wird durch eine Präferenzfunktion konkretisiert, d. h. in eine mathematische Form gebracht. Eine Präferenzfunktion Φ ordnet jeder Handlungsmöglichkeit einen Präferenzwert φ zu, mit dessen Hilfe die Alternativen in eine Rangfolge gebracht werden können. Entsprechend der maßgeblichen Entscheidungsregel wird der Präferenzwert als Funktion verschiedener Kennzahlen berechnet.

Präferenzfunktion: max: $\varphi(a_i)$ mit $\varphi(a_i) = \Phi[y_1(E_i), y_2(E_i), ..., y_h(E_i)]$

$E_i \equiv$ Ergebnisverteilungen; $y_h \equiv$ Kennzahlen;
$\varphi(a_i) \equiv$ Präferenzwert der Handlungsalternative a_i

Verschiedene Entscheidungsregeln – Übersicht

Ungewissheitssituationen

Typ I

- Mini-Max-Kriterium
- Maxi-Max-Kriterium
- Hurwicz-Kriterium
- LaPlace-Kriterium

Typ II

- Savage-Niehans-Kriterium
- Entscheidungsregeln auf der Basis von Frohlockenswerten

Risikosituationen (Typ III)

- μ-Prinzip
- μ-σ-Prinzip
- μ-e^{min}-Prinzip, μ-f-Prinzip, μ-v-Prinzip, μ-V-Prinzip
- Bernoulli- Prinzip