# Entscheidungen bei Risiko

Risikosituationen = Umweltsituationen mit Eintrittswahrscheinlichkeiten

Arten von Entscheidungsprinzipien

- Ungewissheitssituationen s. KE1
- Risikosituationen

Klassische Entscheidungsprinzipien

- μ-Prinzip
- μ-σ-Prinzip, hier insb. Portfeuilletheorie
- μ-$e^{min}$-Prinzip,
  μ-f-Prinzip,
  μ-v-Prinzip,
  μ-V-Prinzip
- Bernoulli- Prinzip

# Das μ-Prinzip

Prinzip = Erwartungswertmaximierung:
Wähle die Handlungsalternative, bei der der Erwartungswert am größten ist!

$$\boxed{\max : \varphi(a_i) = \mu_i = \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \cdot p_j}$$

Beispiel:

| | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|
| | $p_1$=0,5 | $p_2$=0,2 | $p_3$=0,1 | $p_4$=0,2 |
| $a_1$ | 40 | 80 | 100 | 100 |
| $a_2$ | 70 | 80 | 50 | 60 |
| $a_3$ | 10 | 20 | 500 | 20 |

$$\mu_1 = 40 \cdot 0{,}5 + 80 \cdot 0{,}2 + 100 \cdot 0{,}1 + 100 \cdot 0{,}2 = 66$$
$$\mu_2 = 70 \cdot 0{,}5 + 80 \cdot 0{,}2 + 50 \cdot 0{,}1 + 60 \cdot 0{,}2 = 68$$
$$\mu_3 = 10 \cdot 0{,}5 + 20 \cdot 0{,}2 + 500 \cdot 0{,}1 + 20 \cdot 0{,}2 = 63$$

# Rationalität des μ-Prinzips

Im **Wiederholungsfall** (Massenphänomene) ist eine Orientierung am μ-Prinzip wegen des „Gesetzes der großen Zahlen“ vernünftig. Bei hinreichend häufiger Wiederholung einer Aktion wird man bei Wahl von $a_1$ (gem. Zahlenbeispiel) *im Durchschnitt* das höchste Ergebnis erzielen.

Bei **Einzelentscheidungen** gilt eine Orientierung am μ-Prinzip als weniger plausibel. Grund dafür ist, dass die Streuung der Werte und damit das Risiko eines besonders niedrigen oder aber auch die Chance auf einen besonders hohen Wert nicht hinreichend berücksichtigt wird.
Grundsätzliche Irrationalität der Wahl von $a_3$???

⇒ Einbezug eines Extrem- oder Streuungsmaßes in die Präferenzfunktion

⇒ μ-σ-Prinzip o. a.

# Das μ-σ-Prinzip

Prinzip: Ranglozierung der Handlungsalternativen nach einem Präferenzwert $\varphi(a_i) = \Phi[\mu_i, \sigma_i]$

Ergebnisniveau

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \cdot p_j$$

Streuung der Ergebniswerte = Risiko

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(e_{ij} - \mu_i\right)^2 \cdot p_j}$$

Eigenschaften der Präferenzfunktion:

$$\frac{\partial\varphi(\mu,\sigma)}{\partial\mu} > 0$$

Mit steigendem Erwartungswert steigt der Präferenzwert der Handlungsalternative.

$$\frac{\partial\varphi(\mu,\sigma)}{\partial\sigma} < 0$$

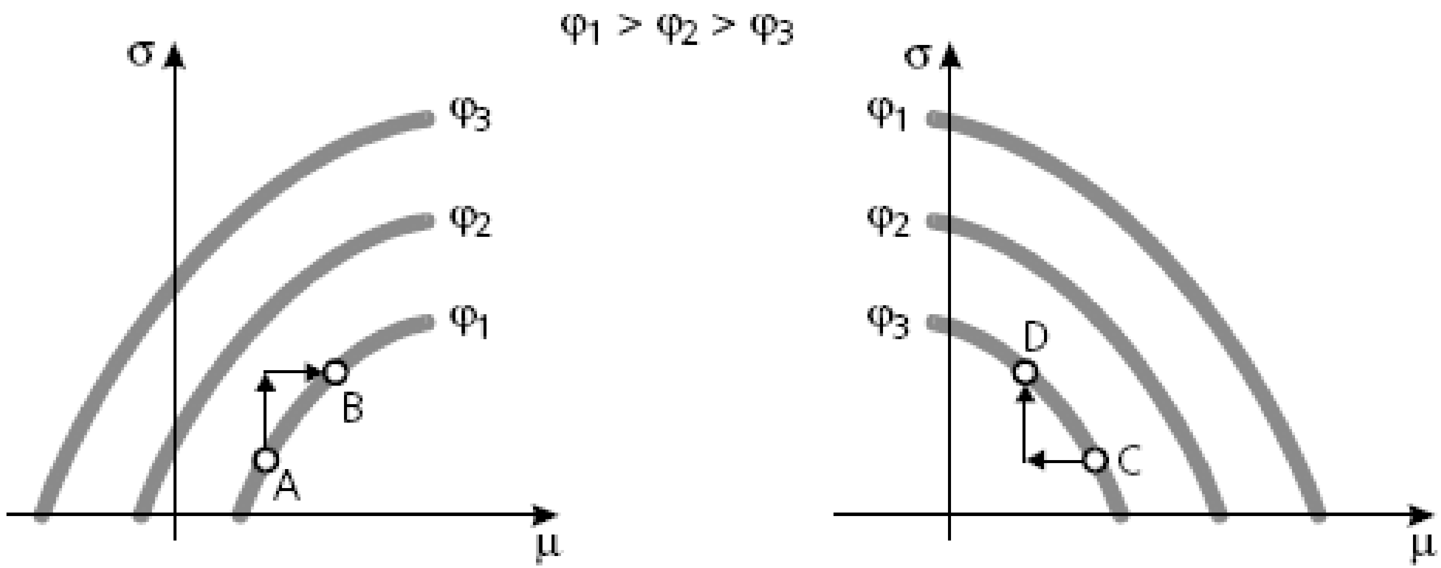
Mit steigender Streuung sinkt der Präferenzwert der Handlungsalternative ⇔ Risikoscheu

$$\frac{\partial\varphi(\mu,\sigma)}{\partial\sigma} > 0$$

Mit steigender Streuung steigt der Präferenzwert der Handlungsalternative ⇔ Risikofreude

(Risikoneutralität ⇔ μ-Prinzip)

# Risikoscheu und Risikofreude beim μ-σ-Prinzip




## Risikoscheu:

Eine Erhöhung des Risikos (σ ↑) muss durch einen höheren Erwartungswert (μ →) ausgeglichen werden

## Risikofreude:

Eine Verringerung des Erwartungswertes (μ ←) kann durch ein höheres Risiko (σ ↑) ausgeglichen werden.

| | |
|---|---|
| Indifferenzlinien = | Kombinationen von μ und σ, die zum gleichen Präferenzwert φ führen. |

# Formen des μ-σ-Prinzips

$$\max : \varphi(a_i) = \Phi(\mu_i, \sigma_i) = \mu_i - \alpha \cdot \sigma_i$$

$$\max : \varphi(a_i) = \Phi(\mu_i, \sigma_i) = \mu_i - \alpha \cdot \sigma_i^2$$

$\alpha > 0 \Leftrightarrow$ Risikoscheu
$\alpha < 0 \Leftrightarrow$ Risikofreude

$$\max : \varphi(a_i) = \Phi(\mu_i, \sigma_i) = \mu_i - \alpha \cdot (\mu_i^2 + \sigma_i^2)$$

| | $\mu$ | $\sigma$ | $\sigma^2$ | $\mu-0,5\sigma$ | $\mu+0,5\sigma$ | $\mu-0,1(\mu^2+\sigma2)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 66 | 26,9 | 724 | 52,55 | 79,45 | -442 |
| $a_2$ | 68 | 8,7 | 76 | 63,65 | 72,35 | -402 |
| $a_3$ | 63 | 145,7 | 21241 | -9,85 | 135,85 | -2458 |

## Rationalität des μ-σ-Prinzips

Es lässt sich zeigen, dass in bestimmten Fällen das μ-σ-Prinzip zu Handlungsempfehlungen führt, die gegen das Dominanzprinzip verstoßen.

# Portefeuilletheorie

**Gegenstand der Portefeuilletheorie:** Optimale Zusammensetzung eines Wertpapierdepots aus verschiedenen Wertpapieren.

Ausgangspunkt: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Rendite von Wertpapieren mit dem Erwartungswert $\mu_i$ und der Streuung $\sigma_i$.

Möglichkeit der Mischung verschiedener Wertpapiere, so dass etwa bei gegebenem oder höherem Erwartungswert ein niedrigeres Risiko realisiert werden kann.

Es gilt: $\boldsymbol{\mu_p = x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2}$

mit $\mu_p$ = Erwartungswert des Portefeuilles

$\mu_{1,2}$ = Erwartungswert des Wertpapiers 1, 2

$x_{1,2}$ = Anteile des Wertpapiers 1, 2

# Streuung (Risiko) von Portefeuillerenditen I

Möglichkeit der Risikoverringerung durch Mischung der Wertpapiere in Abhängigkeit von der **Korrelation** der Wertpapierrenditen.

Korrelation: $\boxed{\rho_{12} = \frac{\mathrm{cov}_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2}}$ wobei: $\mathrm{cov}_{12} = \sum_{j=1}^{n} \left(e_{1j} - \mu_1\right) \cdot \left(e_{2j} - \mu_2\right) p_j$

$$\sigma_p^2 = x_1^2 \cdot \sigma_1^2 + x_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12} \qquad (24)$$

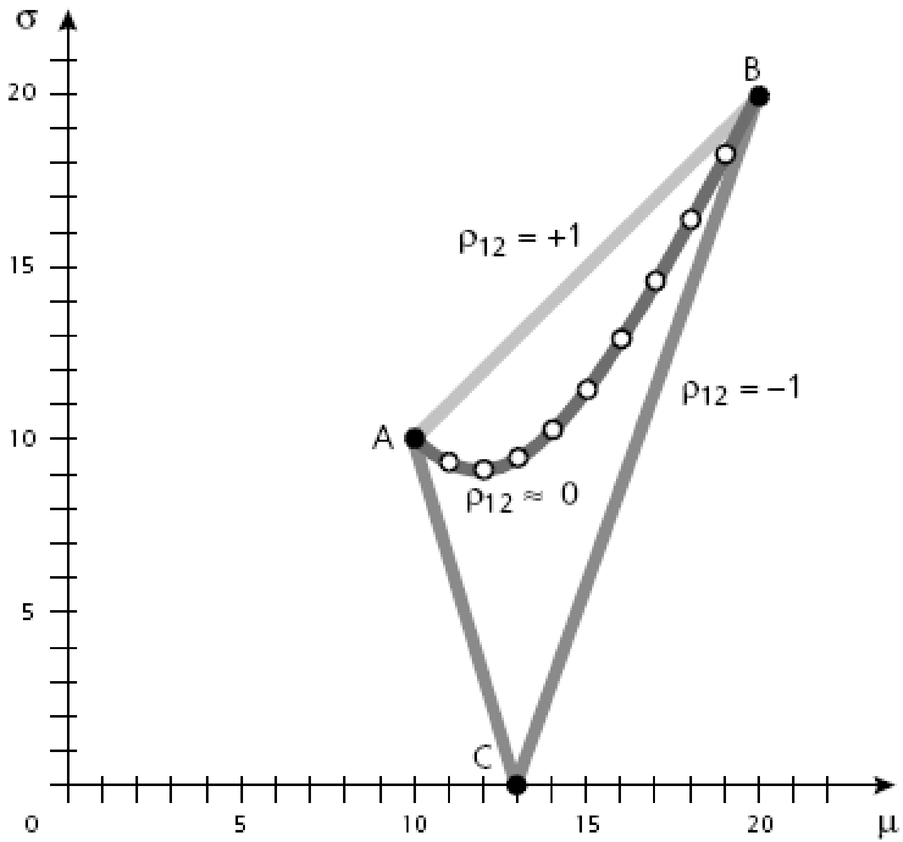
$$\rho = 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma_p = x_1 \cdot \sigma_1 + x_2 \cdot \sigma_2 \qquad (24.1)$$

$$\rho = -1 \quad \Rightarrow \quad \sigma_p = \pm\left(x_1 \cdot \sigma_1 - x_2 \cdot \sigma_2\right) \qquad (24.2)$$

$$\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_p = \sqrt{x_1^2 \cdot \sigma_1^2 + x_2^2 \cdot \sigma_2^2} \qquad (24.3)$$

# Streuung (Risiko) von Portefeuillerenditen II

Möglichkeit der Risikoverringerung durch Mischung der Wertpapiere in Abhängigkeit von der **Korrelation** der Wertpapierrenditen.




A: $x_1$=1
Nur WP $a_1$ (ertrags- u. risiko**arm**) im Depot

B: $x_1$=0
Nur WP $a_2$ (ertrags- u. risiko**reich**) im Depot

Verbindungslinie von A nach B:
Austausch von $a_1$ durch $a_2$!

# Rationalität des μ-Prinzips II

**Wiederholungsfall** (Massenphänomene):
Geltung des „Gesetzes der großen Zahlen“

**Einzelentscheidungen**:
Keine Berücksichtigung der Streuung der Werte
⇒ Chancen und Risiken irrelevant?

**Lösungsansätze:**

⇒ Einbezug eines Extrem- oder Streuungsmaßes in die Präferenzfunktion, z. B. μ-σ-Prinzip etc.

⇒ Bernoulli-Prinzip, d. h. Transformation der Ergebniswerte in Nutzenwerte entsprechend der individuellen Risikoneigung.

# Das Bernoulli-Prinzip

**Ablauf:**

1. Überführung der Ergebniswerte $e_{ij}$ mittels einer Risiko-Nutzen-Funktion (RNF) in Nutzenwerte $u_{ij}=u(e_{ij})$

$\Downarrow$

2. Berechnung des Präferenzwertes $\varphi(a_i)$ als Erwartungswert der Nutzenwerte

| e | 1 | 4 | 16 | 25 |
|---|---|---|---|---|
| $p(e_1=e)$ | 0,25 | 0,3 | 0,2 | 0,25 |

$$\text{RNF: } u(e) = 0{,}5 \cdot \sqrt{e}$$

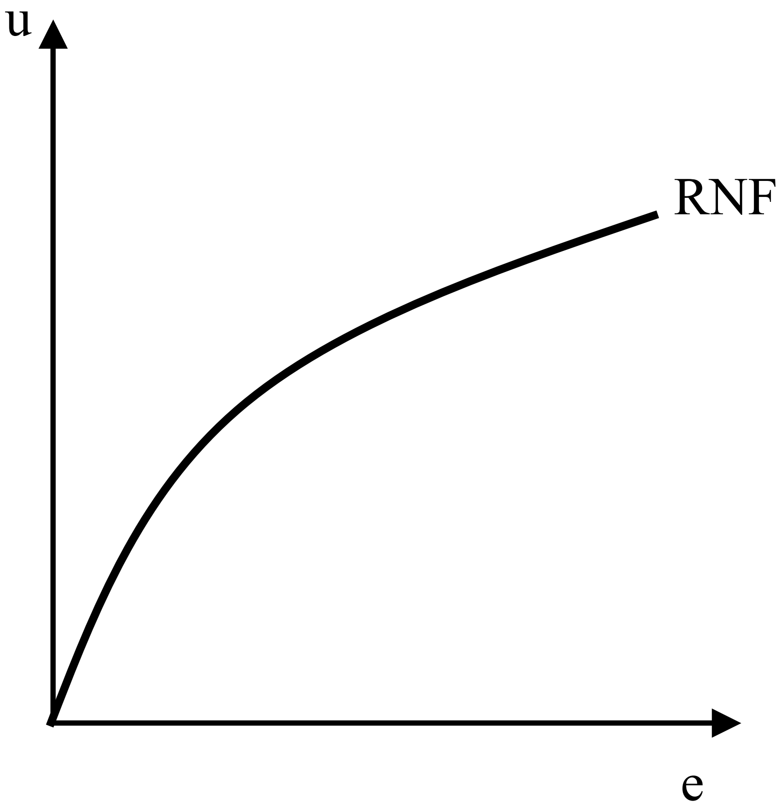
| u | 0,5 | 1 | 2 | 2,5 |
|---|---|---|---|---|
| $p(u_1=u)$ | 0,25 | 0,3 | 0,2 | 0,25 |

$$\Downarrow$$

$$\varphi(a_1) = 0{,}5 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 + 2{,}5 \cdot 0{,}25 = 1{,}45$$

Zentrales Problem: Bestimmung der „Risikonutzenfunktion“!

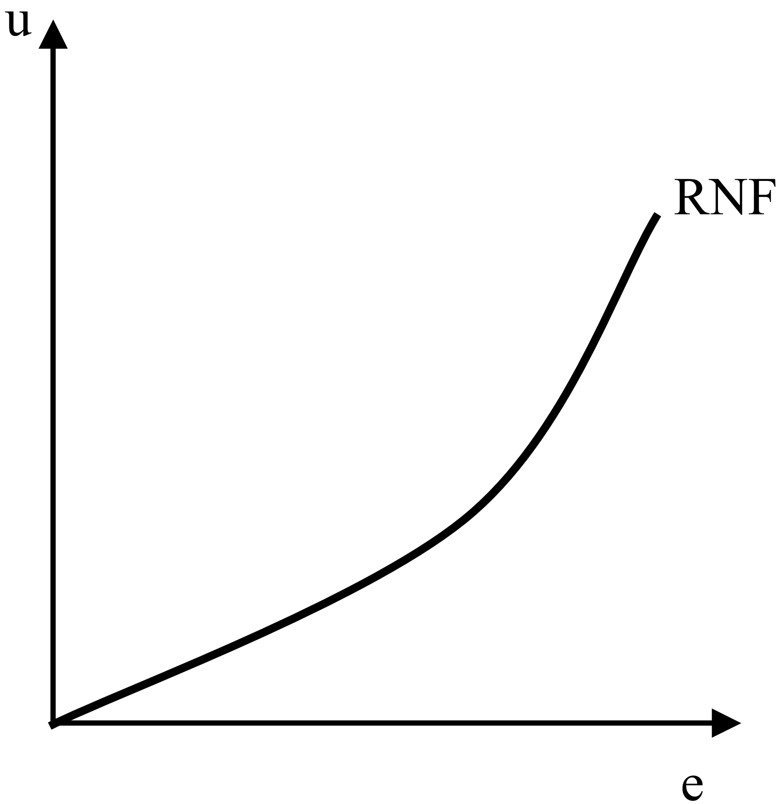
# Verlaufstypen von Risikonutzenfunktionen I




Mit steigendem Ergebniswert e steigt der Nutzen u nur unterproportional
$\Rightarrow$ risikoscheues Verhalten

RNF verläuft degressiv steigend: $\frac{d^2u}{de^2} < 0$

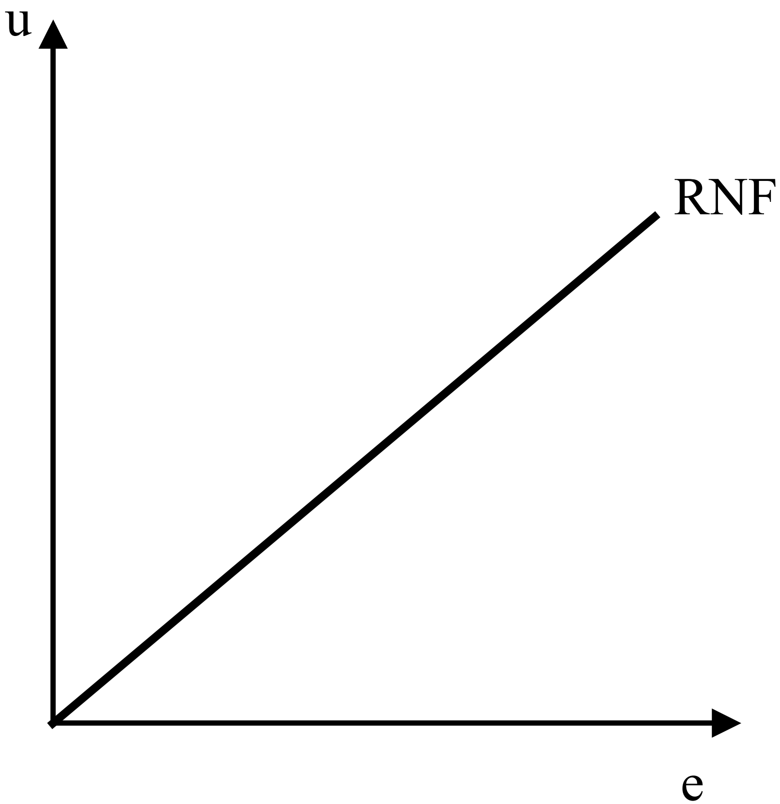
# Verlaufstypen von Risikonutzenfunktionen II




Mit steigendem Ergebniswert e steigt der Nutzen u überproportional
$\Rightarrow$ risikofreudiges Verhalten

RNF verläuft progressiv steigend: $\frac{d^2u}{de^2} > 0$

# Verlaufstypen von Risikonutzenfunktionen III




Mit steigendem Ergebniswert e steigt der Nutzen u genau proportional
$\Rightarrow$ risikoneutrales Verhalten

RNF verläuft linear steigend: $$\frac{d^2u}{de^2} = 0$$

# Das Sicherheitsäquivalent

Unter dem einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $E_i$, durch die die Konsequenzen einer Alternative $a_i$ gekennzeichnet werden, entsprechenden Sicherheitsäquivalent versteht man den sicheren Einkommensbetrag $S(a_i)$ der dem Entscheidenden gerade als gleichwertig mit der (unsicheren) Alternative $a_i$ erscheint.

$$\Phi\left[S(a_i)\right] = \Phi\left[E_i\right]$$

Das Sicherheitsäquivalent ist der (subjektive) Wert einer Alternative, im Sinne eines „Mindestkompensationsbetrages“ („Preisuntergrenze“), bei dem der Entscheidende gerade bereit ist, auf die Wahrnehmung der betrachteten Alternative zu verzichten bzw. sein Recht dazu zu verkaufen.