Kennzahlen dienen der Charakterisierung von Ergebnisverteilungen. Nachfolgend sollen häufig verwendete Kennzahlen beispielhaft berechnet werden. Als Zahlenbeispiel soll jeweils von der nachfolgend vorgegebenen Ergebnistabelle ausgegangen werden.

	s_1	s_2	s_3	s_4
	p_1=0,1	p_2=0,3	p_3=0,2	p_4=0,4
a_1	-80	60	20	-40
a_2	10	0	5	0
a_3	60	10	-15	-15

Tabelle 1

Zentralmaße

Erwartungswert:

Der Erwartungswert gibt das Durchschnittsergebnis einer Alternative an, wobei die Wahrscheinlichkeiten als Gewichte verwendet werden.

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \cdot p_j$$

$$\mu_1 = -80 \cdot 0{,}1 + 60 \cdot 0{,}3 + 20 \cdot 0{,}2 - 40 \cdot 0{,}4 = -2$$
$$\mu_2 = 10 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}4 = +2$$
$$\mu_3 = 60 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}3 + -15 \cdot 0{,}2 - 15 \cdot 0{,}4 = 0$$

Modus

Der Modus ist der am wahrscheinlichsten eintretende Wert.

Zur Bestimmung des Modus empfiehlt es sich, die Ausgangstabelle umzuformen. Dabei sortiert man die möglichen Ergebniswerte in aufsteigender Folge und fasst die Wahrscheinlichkeiten mit identischen Ergebniswerten zusammen. So erhält man eine Tabelle, die zu jedem Ergebniswert die Wahrscheinlichkeit angibt, dass der im Zeilenkopf genannte Wert e eintritt. (So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, bei Wahl von a_3 zu einem Ergebnis von -15 zu kommen 0,2+0,4=0,6)

e	-80	-40	-15	0	5	10	20	60
$p(e_1=e)$	0,1	**0,4**	0	0	0	0	0,2	0,3
$p(e_2=e)$	0	0	0	**0,7**	0,2	0,1	0	0
$p(e_3=e)$	0	0	**0,6**	0	0	0,3	0	0,1

Tabelle 2

Damit gilt für den Modus: y_1= -40; y_2= 0; y_3= -15.

(Anm.: Soweit keine andere Abkürzung für eine Kennzahl üblich ist (so wie etwa μ für den Erwartungswert), wird diese hier mit y_i abgekürzt.

Median

Der Median ist der größte Ergebniswert, der mit 50 %-iger Wahrscheinlichkeit eintritt oder übertroffen wird.

Der Median lässt sich einfach aus einer Tabelle ablesen, die die Wahrscheinlichkeiten dafür enthält, dass ein vorgegebener Ergebniswert **e** bei Wahl einer bestimmten Handlungsalternative **mindestens erreicht oder sogar übertroffen** wird. Dazu entwickelt man aus Tabelle 2 die kumulierten Häufigkeiten. (So ist z. B die Wahrscheinlichkeit, bei Wahl von Handlungsalternative a_2 einen Ergebniswert von 5 oder höher zu erzielen 0,2+0,1=0,3). Die kumulierten Häufigkeiten gibt Tabelle 3 wider.

e	-80	-40	-15	0	5	10	20	60	>60
$p(e_1 \geq e)$	1	0,9	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,3	0
$p(e_2 \geq e)$	1	1	1	1	0,3	0,1	0	0	0
$p(e_3 \geq e)$	1	1	1	0,4	0,4	0,4	0,1	0,1	0

Tabelle 3

Der größte Ergebniswert, der mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % erreicht oder übertroffen wird – das ist gerade der Median – ist damit bei den drei Alternativen y_1= 20; y_2= 0; y_3= -15

Extremmaße

Der **bestmögliche Ergebniswert e^{max}** und der **schlechtestmögliche Ergebniswert e^{min}** sind offenbar:

	s_1	s_2	s_3	s_4	e^{min}	e^{max}
a_1	-80	60	20	-40	**-80**	**60**
a_2	10	0	5	0	**0**	**10**
a_3	60	10	-15	-15	**-15**	**60**

Tabelle 1 (mit Min und Max)

Das „**Maximale Bedauern**" ist der maximale Nachteil gegenüber dem bei den jeweiligen Umweltzuständen bestmöglichen Ergebniswerten, also $y_i = \max_j \left[\max_k (e_{kj}) - e_{ij} \right]$. Dazu ist eine Tabelle mit den „Bedauernswerten" aufzustellen und das bei jeder Handlungsalternative maximal mögliche Bedauern festzustellen.

	s_1	s_2	s_3	s_4	Max
a_1	140	0	0	40	140
a_2	50	60	15	0	60
a_3	0	50	35	15	50

Es ist daher: $y_1 = 140$; $y_2 = 60$; $y_3 = 50$

Das „**Maximale Frohlocken**" ist der maximale Vorteil gegenüber dem bei den jeweiligen Umweltzuständen schlechtest möglichen Ergebniswerten, also $y_i = \max_j \left[e_{ij} - \min_k (e_{kj}) \right]$. Hier ist eine Tabelle mit „Frohlockenswerten" zu erstellen und jeweils das maximale Frohlocken zu notieren.

	s_1	s_2	s_3	s_4	Max
a_1	0	60	35	0	60
a_2	90	0	20	40	90
a_3	140	10	0	25	140

Es gilt: $y_1 = 60$; $y_2 = 90$; $y_3 = 140$

Fraktilswert

Der Fraktilswert f ist der größte Ergebniswert, für den die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens erreicht wird, nicht unterhalb einer kritischen Wahrscheinlichkeit p_k liegt.

Dazu kann die zur Bestimmung des Medians, der ja nur eine spezielle Form des Fraktilswertes (mit p_k=0,5) ist, vorbereitete Tabelle 3 herangezogen werden.

e	-80	-40	-15	0	5	10	20	60	>60
$p(e_1 \geq e)$	1	0,9	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,3	0
$p(e_2 \geq e)$	1	1	1	1	0,3	0,1	0	0	0
$p(e_3 \geq e)$	1	1	1	0,4	0,4	0,4	0,1	0,1	0

Tabelle 3

Für den Wert p_k=0,9 sind die Fraktilswerte gemäß unterem Tabellenteil (s. blaue Pfeile)

f_1= -40; f_2= 0 und f_3= -15

Ruin- bzw. Verlustwahrscheinlichkeit

Die Ruin- bzw. Verlustwahrscheinlichkeit v ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein besonders kritischer Ergebniswert e_k unterschritten wird, also

$$v_i = p(e_i < e^k) = \sum_{j \in K(i)} p_j \text{ mit } K(i) = \left\{ j \mid e_{ij} < e^k \right\}$$

Die Vorgehensweise bei der Bestimmung der Verlustwahrscheinlichkeit ist genau umgekehrt wie diejenige bei der Berechnung des Fraktilswertes. Für $e_k = 0$ gilt gemäß oben wiedergegebener Tabelle 3 (s. grüne Pfeile):

$p(e_1 \geq 0)$=0,5 $\Rightarrow$ $p(e_1 < 0)$=1-0,5=0,5; Also v_1=0,5=50 %

$p(e_2 \geq 0)$=1 $\Rightarrow$ $p(e_2 < 0)$=1-1=0; Also v_2= 0 =0 %

$p(e_3 \geq 0)$=0,4 $\Rightarrow$ $p(e_3 < 0)$=1-0,4=0,6; Also v_3=0,6=60 %

Die Sinnhaftigkeit der Werte lässt sich leicht anhand der Ausgangstabelle klar machen.

Verlusterwartung

Die Verlusterwartung V ist der Erwartungswert des Abstandes aller unterhalb eines kritischen Ergebnisniveaus e_k liegenden Ergebnisse von diesem kritischen Wert e_k, also

$$V_i = \sum_{j \in K(i)} p_j \cdot (e^k - e_{ij}) \text{ mit } K(i) = \{j \mid e_{ij} < e^k\}$$

e	-80	-40	-15	0	5	10	20	60
$p(e_1=e)$	**0,1**	**0,4**	**0**	0	0	0	0,2	0,3
$p(e_2=e)$	**0**	**0**	**0**	0,7	0,2	0,1	0	0
$p(e_3=e)$	**0**	**0**	**0,6**	0	0	0,3	0	0,1

Tabelle 4

Ein Blick auf die hier noch einmal wiedergegebene Tabelle 2 zeigt, dass für $e_k = 0$ gilt:

$V_1=(0+80)\cdot 0,1+(0+40)\cdot 0,4 = 24$
$V_2 = 0$
$V_3=(0+15)\cdot 0,6 = 9$

Streuungsmaße

Variationsbreite

Die Variationsbreite ist die Differenz zwischen maximalem und minimalem Ergebniswert, also $y_i = \max_j(e_{ij}) - \min_j(e_{ij})$

$y_1=60-(-80) = 140$ $y_2=10-0 = 10$ $y_3=60-(-15) = 75$

Mittlere absolute Abweichung

Die mittlere absolute Abweichung vom Erwartungswert ist $y_i = \sum_{j=1}^{n} |e_{ij} - \mu_i| \cdot p_j$

Für a_1 war $\mu_1= -2 \Rightarrow y_1=78\cdot 0,1+62\cdot 0,3+22\cdot 0,2+38\cdot 0,4 = 46$
Für a_2 war $\mu_2=+2 \Rightarrow y_2=8\cdot 0,1+2\cdot 0,3+3\cdot 0,2+2\cdot 0,4 = 2,8$
Für a_3 war $\mu_3= 0 \Rightarrow y_3=60\cdot 0,1+10\cdot 0,3+15\cdot 0,2+15\cdot 0,4 = 18$

Varianz

Die Varianz σ^2 ist die quadratische Abweichung vom Erwartungswert, also

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(e_{ij} - \mu_i\right)^2 \cdot p_j$$

$$\sigma_1^2 = (-80-(-2))^2 \cdot 0{,}1 + (60-(-2))^2 \cdot 0{,}3 + (20-(-2))^2 \cdot 0{,}2 + ((-40)-(-2))^2 \cdot 0{,}4 = 2.436$$

$$\sigma_2^2 = (10-2)^2 \cdot 0{,}1 + (0-2)^2 \cdot 0{,}3 + (5-2)^2 \cdot 0{,}2 + (0-2)^2 \cdot 0{,}4 = 11$$

$$\sigma_3^2 = (60-0)^2 \cdot 0{,}1 + (10-0)^2 \cdot 0{,}3 + ((-15)-0)^2 \cdot 0{,}2 + ((-15)-0)^2 \cdot 0{,}4 = 525$$

Die **Standardabweichung** ist die Wurzel aus der Varianz, also $\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(e_{ij} - \mu_i\right)^2 \cdot p_j}$

$$\sigma_1 = \sqrt{2436} = 49{,}36$$

$$\sigma_2 = \sqrt{11} = 3{,}32$$

$$\sigma_3 = \sqrt{525} = 22{,}91$$

Ausblick:

Der im Rahmen der Entscheidungstheorie nun folgende Schritt ist das Einsetzen der zuvor gebildeten Kennzahlen in eine (der gewünschten Entscheidungsregel entsprechenden) Präferenzfunktion. Dieser Schritt wird in dem Skript „Zahlenbeispiel zu Entscheidungsregeln“ vollzogen. Dabei wird wieder auf das gleiche, hier genutzte Zahlenbeispiel zurückgegriffen.